

# Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH pour son aide, ses innombrables dons, ALLAH  
qui m'a donné la force, la

volonté et le moral pour terminer ce modeste travail.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon promoteur

*Dr.ACHOUR Dahmane* pour

avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continuuel tout le long de la  
réalisation de ce mémoire et

qu'elle n'a pas cessée de me donner ses conseils.

Mes remerciements vont au président du jury et aux membres du jury qui  
m'ont fait l'honneur de participer

au jury.

A tout MERCI

# Table des matières

<b>Notation</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les espaces de Banach réticulés</b>	<b>2</b>
1.1 Les espaces de Banach classiques . . . . .	2
1.1.1 Dualité-Topologies faible et faible-* . . . . .	3
1.2 Banach réticulés . . . . .	5
1.3 Opérateurs réguliers, opérateurs $(q, p)$ -convexes et $(p, q)$ -concaves . . . . .	7
1.3.1 Opérateurs réguliers . . . . .	7
1.3.2 Opérateurs $(q, p)$ -convexes et $(p, q)$ -concaves . . . . .	8
<b>2 Les opérateurs positifs <math>(p, q)</math>-sommants</b>	<b>11</b>
2.1 Les espaces $l_{p, weak }^n(E)$ . . . . .	11
2.2 Les opérateurs positifs $(p, q)$ -sommants . . . . .	13
<b>3 Les opérateurs positifs fortement <math>(p, q)</math>-sommants</b>	<b>16</b>
3.1 Les espaces $l_p^n \langle  E  \rangle$ . . . . .	16
3.2 Les opérateurs positifs fortement $(p, q)$ -sommants . . . . .	18
3.3 Applications . . . . .	24
<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

**Notation**

$p^*$	L'exposant conjugué de $p$ (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ ).
$B_X$	Boule unité fermée de l'espace $X$ .
$B(B_{X^*})$	$\sigma$ -algèbre (tribu) de Borel engendrée par $X^*$ .
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires réels ou complexes.
$\sigma(X^*, X)$	Topologie faible-* définie sur $X^*$ .
$L_0(\Omega, \mu)$	Espace des classes d'équivalences des fonctions mesurables sur $\Omega$ .
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues sur un compact $K$ à valeurs réelles.
$l_p(X)$	Espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty \in X$ absolument $p$ -sommables.
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de $X$ dans $Y$ .
$\Pi_p(X, Y)$	Espace des opérateurs $p$ -sommants de $X$ dans $Y$ .
$D_p(X, Y)$	Espace des opérateurs fortement $p$ -sommants de $X$ dans $Y$ .

# Introduction

Dans l'article [1] le concept des opérateurs positivement fortement  $(p, q)$ -sommants a été étudié, où nous trouvons quelques propriétés géométriques des espaces de Banach et des théorèmes classiques démontrés en utilisant l'espace des opérateurs positivement sommants. Nous proposons dans ce travail de revoir cette généralisation en détail et d'essayer d'étudier quelques exemples et quelques propriétés.

Ce travail est divisé en trois chapitre qui sont les suivants :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant les espaces de Banach lattices, les opérateurs réguliers et les opérateurs  $(q, p)$ -convex (resp.  $(p, q)$ -concave).

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté le concept des opérateurs positifs  $(p, q)$ -sommants.

Dans le troisième chapitre dans lequel donnons les opérateurs positifs fortement  $(p, q)$ -sommants. On commencera par la définition des espaces  $l_p^n \langle |E| \rangle$ , puis nous donnons le concept des opérateurs positifs fortement  $(p, q)$ -sommant. Comme application, nous avons également montré que certains résultats connus sur les opérateurs  $(p, q)$ -concave de Banach lattice peuvent être généralisés à la classe des opérateurs  $(p, q)$ -convexe.

# Chapitre 1

## Les espaces de Banach réticulés

### 1.1 Les espaces de Banach classiques

**Les espace de suites p-sommable :**

Soit  $p$  un noombre réel avec  $1 \leq p < \infty$ , on disigne par  $l_p$  l'ensemble des suites de scalaire  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( $x_n \in K$ ) pour les quelle la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$  est convergent i.e.

$$l_p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

on pose

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = \infty$ , on disigne par

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté  $l_{\infty}(\mathbb{N})$  ou tout simplement  $l_{\infty}$ . On notera  $c_0(\mathbb{N})$  ou sous  $c_0$  le sous espace fermé de  $l_{\infty}$  des suites qui convergent vers zéro.

**Les espaces de fonctions continues :**

Soit  $K$  un espace topologique compact, et soit  $f$  une fonction definit sur  $K$ , d'après le théorème de Heine  $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$  le suprem de  $f$  est atteint i.e.  $\sup_{t \in K} |f(t)| < +\infty$ . On

désigne par  $C(K)$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme de la convergence uniforme.

$$\|f\|_{\mathcal{C}(K)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

### Les espaces de fonctions intégrables:

Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction mesurable. On définit

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{a > 0; |f(t)| \leq a \text{ } (\mu\text{-p.p.}) \text{ } t \in \Omega\} \quad \text{si } p = +\infty$$

$$= \sup_{t \in \Omega} \text{ess } |f(t)|.$$

Pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace de Banach  $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \mu)$  représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions mesurables telles que  $\|f\|_p < +\infty$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue.

#### 1.1.1 Dualité-Topologies faible et faible\*

On notera  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et la boule unité de  $X$  sera notée  $B_X$ . On désigne par  $X^*$  le dual topologique de  $X$  : l'espace des formes linéaires continues sur  $X$  muni de la norme dual

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|.$$

Les éléments de  $X^*$  seront le plus généralement notés par  $x^*$ . Pour  $x^* \in X^*$  et  $x \in X$  on désignera souvent  $\langle x^*, x \rangle$  au lieu de  $x^*(x)$ .

On note par  $X^{**}$  le bidual de  $X$  ( $X^{**} = (X^*)^*$ ).

Soit  $x \in X$ , l'application  $x^* \longrightarrow \langle x^*, x \rangle$  de  $X^*$  dans  $\mathbb{R}$  est une forme linéaire continue sur  $X^*$ , donc un élément de  $X^{**}$ .

#### Dual d'un opérateur continu :

Soit  $T : X \longrightarrow Y$  une application linéaire qu'on appellera souvent opérateur. Si l'opérateur  $T : X \longrightarrow Y$  est continu ( $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ), on appelle adjoint ou dual de  $T$  l'unique application linéaire continue  $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$  telle que :

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle, \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$

Le dual de  $T^*$  soit  $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$  s'appelle le bidual de  $T$ .

Si l'opérateur linéaire continue  $T : X \longrightarrow Y$  est bijective continue et si  $T^{-1} : Y \longrightarrow X$  est continue, on dit que  $T$  est un isomorphisme.

Si l'opérateur  $T : X \longrightarrow Y$  s'écrit par

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in E.$$

On dit que  $T$  est isométrique.

**Remarque 1.1.1**  $T$  est isomorphisme  $\iff \forall \alpha, \beta > 0$  tels que  $\alpha \|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta \|x\|$ .

### L'injection canonique :

L'injection canonique  $J_X : X \longrightarrow X^{**}$  qui à tout  $x \in X$  associe  $J_X(x)$  telle que

$$\langle J_X(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, \forall x^* \in X^*$$

est une isométrie qui, en générale, n'est pas surjective. A l'aide de  $J_X$  on peut toujours identifier  $X$  à un sous espace de  $X^{**}$ .

### L'espace réflexif :

Soit  $X$  un espace vectoriel normé, on dit que  $X$  est un espace réflexif si l'injection canonique  $J_X$  est surjective ( $J_X$  isométrie isomorphisme).

### Topologies faible et faible-\* :

Si  $X$  un espace de Banach, sa topologie faible  $\sigma(X, X^*)$  sur  $X$ , plus simplement notée  $w$ , est la topologie la moins fine sur  $X$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_f)_{f \in X^*}$ .

Sur le dual  $X^*$ , autre la topologie faible  $\sigma(X^*, X^{**})$ , on peut définir la topologie pré-faible, ou faible-\*, notée aussi  $\sigma(X^*, X)$  qui est la topologie la moins fine redant continues tous les applications linéaires  $(\varphi_f)_{f \in X}$  où

$$\begin{aligned} \varphi_f : X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longrightarrow \varphi_f(\xi) = \xi(f). \end{aligned}$$

## 1.2 Banach réticulés

**Définition 1.2.1** *Un ordre sur un ensemble non-vidé  $M$  est la relation  $\leq$  telles que pour tous  $x, y, z \in M$  nous avons :*

- (1)  $x \leq x$ ,
- (2)  $x \leq y$  et  $y \leq x$  implique  $x = y$ ,
- (3)  $x \leq y$  et  $y \leq z$  implique  $x \leq z$ .

Si  $A$  est un sous-ensemble non-vidé de  $M$ , alors  $x$  est un majorant de  $A$  si  $a \leq x$  pour tout  $a \in A$ . Dans ce cas, on dit que  $A$  est majoré. on dit aussi que  $x$  est une borne supérieure "supremum", si pour tout autre majorant  $y$ , nous avons  $x \leq y$ . Les termes suivants minorant, borne inférieure "infimum" et minoré sont définis d'une manière analogue. L'ensemble qui est à la fois majoré et minoré est appelé ensemble borné pour l'ordre.

**Définition 1.2.2** *Un ensemble réticulé est un ensemble non vide  $M$  avec un ordre  $\leq$  tel que chaque paire d'élément  $x, y \in M$  possède à la fois un supremum  $x \vee y$  et un infimum  $x \wedge y$ . La borne supérieure d'un sous-ensemble  $A$  de  $M$ , s'il existe, est notée par l'une quelconque des notations  $\sup(A)$ ,  $\vee A$ ,  $\sup\{a : a \in A\}$ ,  $\vee\{a : a \in A\}$  ou  $\bigvee_{a \in A} a$ .*

**Définition 1.2.3** *Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel réel  $E$  qui est aussi un espace ordonné où les structures linéaire et de l'ordre reliéent par les implication :*

- (1) Si  $x, y, z \in E$  et  $x \leq y$ , alors  $x + z \leq y + z$ ,
- (2) Si  $x, y \in E$ ,  $x \leq y$  et  $0 \leq a \in \mathbb{R}$ , alors  $ax \leq ay$ .

L'ensemble  $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$  que l'on appelle le cône positif dans  $E$ , ses éléments sont appelés positifs (au lieu de non-négatifs).

Un espace vectoriel ordonné qui est aussi un réticulé est un espace de Riesz. Comme 0 est un élément assez particulier d'un espace vectoriel, il ya quelques notations spéciales associées. La partie positive de  $x$  est  $x^+ = x \vee 0$ , alors que la partie négative (il est positif !) est  $x^- = (-x) \vee 0$ . Le module de  $x$  est  $|x| = x \vee (-x)$ .



**Remarque 1.2.1** *Il est élémentaire, mais souvent utile, que  $x^+$  et  $x^-$  sont disjoints et que  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ .*

**Exemple 1.2.1**

1) *L'exemple le plus évident de riesz est les réels avec toutes les opérations habituelles.*

*L'ordre standard sur  $\mathbb{R}^n$  est  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$  c-à-d  $x_k \leq y_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . Cet ordre rend  $\mathbb{R}^n$  à un espace de riesz dans lequel  $(x_k) \vee (y_k) = (x_k \vee y_k)$  et  $(x_k) \wedge (y_k) = (x_k \wedge y_k)$ . Donc,  $(x_k)^+ = (x_k^+)$ ,  $(x_k)^- = (x_k^-)$  et  $|(x_k)| = (|x_k|)$ .*

2) *Soient  $L$  un ensemble non vide et  $E$  l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles sur  $L$  ordonné par l'ordre ponctuelle  $f \leq g \iff f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in L$ . Nous avons donc un espace vectoriel ordonné. Il est clair que si  $f$  et  $g$  sont des fonction à valeurs réelles sur  $L$ , alors meme que les fonctions  $\varphi(x) = f(x) \vee g(x)$  et  $\psi(x) = f(x) \wedge g(x)$  pour tout  $x \in L$  et il est clair que  $\varphi = f \vee g$  et que  $\psi = f \wedge g$ , de telle sorte que  $E$  soit un espace de riesz.*

3) *Soit  $E = \{0, 1, a, b\}$  tels que  $a$  et  $b$  sont incomparable,*

$$\sup E = 1, \inf E = 0,$$

$$F = \{0, x, y\} \text{ tel que } x \text{ et } y \text{ sont incomparable,}$$

$$\inf F = 0,$$

$\Gamma(E) = \{f : E \longrightarrow F, f \text{ est croissante}\}$  n'est pas réticulé, supposons que  $\Gamma(E)$  est un réticulé. Alors sup il existe  $f_1, f_2 : E \longrightarrow F$

$f_1(t) = x \quad \forall t \in E, f_2(t) = y \quad \forall t \in E$ , comme  $x$  et  $y$  incomparable alors  $f_1 \vee f_2$  n'existe pas.

**Définition 1.2.4** *Un sous-ensemble  $A$  d'un réticulé  $M$  est un sous-réticulé si  $x, y \in A$  implique que  $x \vee y \in A$ , où ces opérations sont calculés dans  $M$ .*

*Un sous-réticulé d'un espace de riesz est simplement un sous-espace vectoriel, qui est aussi un sous-réticulé.*

**Exemple 1.2.2**  $c_0$  est un sous espace réticulé de  $l_\infty$ .

**Définition 1.2.5** *Un espace normé réticulé est un espace normé qui est aussi réticulé avec  $|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$ . Un réticulé normé qui est aussi un espace de Banach est appelé un espace de Banach réticulé.*

**Exemple 1.2.3** *Tous les espaces de Banach classiques,  $l_\infty$ ,  $c_0$ ,  $C(k)$ ,  $L_p(\mu)$ , sont des Banach réticulé pour leurs normes usuelles et l'ordre ponctuelle.*

**Définition 1.2.6** *On dira qu'un espace vectoriel est complètement Banach réticulé si tout partie non vide est majorée pour l'ordre, admet un supremum.*

**Remarque 1.2.2** *Le dual  $E^*$  de Banach réticulé  $E$  est complètement Banach réticulé muni par l'ordre naturel*

$$x_1^* \leq x_2^* \iff \langle x_1^*, x \rangle \leq \langle x_2^*, x \rangle, \forall x \in E_+$$

*L'injection canonique  $i : E \longrightarrow E^{**}$  tel que  $\langle i(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$  est un isométrie de  $E$  dans un sous espace de  $E^{**}$  (voir [13], Proposition 1.a.2). Si on considère  $E$  comme un sous réticulé de  $E^{**}$  nous trouvons pour  $x_1, x_2 \in E$ .*

*Si on considère  $E$  comme un sous réticulé de  $E^{**}$  nous trouvons pour*

$$x_1, x_2 \in E, x_1 \leq x_2 \iff \langle x^*, x_1 \rangle \leq \langle x^*, x_2 \rangle, \forall x^* \in E_+^*.$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité.

## 1.3 Opérateurs réguliers, opérateurs $(q, p)$ -convexes et $(p, q)$ -concaves

### 1.3.1 Opérateurs réguliers

Il existe différentes catégories d'applications linéaires entre les espaces de riesz qui sont naturelles à étudier.

**Définition 1.3.1** *Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels réticulés,*

- (1)  *$T : E \rightarrow F$  est positif si  $x \geq 0 \implies Tx \geq 0$ , Les opérateurs positifs,  $T(E_+) \subset F_+$ , sont fermés par l'addition et la multiplication par des réels positifs mais pas sous la multiplication par réels négatifs. L'ensemble de tous ces opérateurs est noté  $\mathcal{L}_+(E, F)$ .*

(2) *L'espace engendré par les opérateurs positifs est l'espace vectoriel des opérateurs réguliers, noté  $\mathcal{L}^r(E, F)$ . Ceci est ordonné par la relation*

*$S \geq T \Leftrightarrow S - T \in \mathcal{L}_+(E, F)$ . Cette définition nous donne  $\mathcal{L}_+^r(E, F) = \mathcal{L}_+(E, F)$ .*

*Pour tout  $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ , la norme de  $T$  est :*

$$\|T\|_r := \inf \{ \|S\| : S \in \mathcal{L}_+(E, F), |T(x)| \leq S(x), x \in E_+ \}$$

*Alors,  $(\mathcal{L}^r(E, F), \|\cdot\|_r)$  est espace de Banach. Si  $F = \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^r(E, \mathbb{R})$  (Pour plus de détails voir [14], Section 1.3).*

(3) *Les opérateur bornés pour l'ordre sont ceux pour lesquels l'image de chaque sous ensemble borné pour l'ordre de  $E$  est un sous-ensemble borné pour l'ordre de  $F$ , lequel est indiqué par  $L^b(E, F)$ . Il est ordonné de la même manière que  $\mathcal{L}^r(E, F)$ .*

*Tout opérateur régulier doit être borné pour l'ordre, mais l'inverse est fausse.*

*Ces formules  $T^+, T^-$  et  $|T|$  sont connues comme les formules de riesz où*

$$T^+ = T \vee 0, T^- = T \wedge 0 \text{ et } |T| = T \vee (-T).$$

Ils existent certains types très particuliers de l'opérateur qui entrent en action dans ce domaine.

**Théorème 1.3.1 ([14], Proposition 1.3.5)** *Si  $E$  est un Banach réticulé et  $F$  un espace normé réticulé alors tout opérateur régulier de  $E$  dans  $F$  est continu pour la norme*

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in B_E^+ \}.$$

$$\text{Où } B_E^+ = B_E \cap E_+.$$

### 1.3.2 Opérateurs $(q, p)$ -convexes et $(p, q)$ -concaves

Soient  $E, F$  deux espace de Banach réticulé et  $X, Y$  deux espaces de Banach.

Soit  $y_1, \dots, y_n$  dans  $E$ , nous utiliserons les notations suivantes : Par le calcul fonctionnel de Krivine [11].

$$\left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in E \text{ et } \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n |a_i|^{p^*} \leq 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq p < \infty, \\ \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i| \text{ pour } p = \infty. \end{cases}$$

**Définition 1.3.2**

a) L'opérateur linéaire  $T : X \longrightarrow F$  et  $(q, p)$ -convexe (i.e.,  $T \in C_{(q, p)}^{vex}(X, F)$ ), s'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$\left\| \left( \sum_{i=1}^n |T(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq M \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} ; \quad 1 \leq q \leq p < \infty$$

et

$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \quad \text{si } p = q = \infty.$$

**Définition 1.3.3** pour toute  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ . La petite constante  $M$  est notée par  $C_{(q, p)}^{vex}(T)$ .

b) L'opérateur linéaire  $T : E \longrightarrow Y$  est  $(p, q)$ -concave (i.e.,  $T \in C_{(p, q)}^{cav}(E, F)$ ), s'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left\| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| \quad \text{si } 1 \leq q \leq p < \infty,$$

et

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| \leq M \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\|, \quad \text{si } p = q = \infty,$$

pour toute  $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ . La petite constante  $M$  est notée par  $C_{(p, q)}^{cav}(T)$ . Si  $p = q$ , on obtient les opérateurs  $p$ -convexes, on obtient les opérateurs  $p$ -convexes (resp. les opérateurs  $p$ -concaves).

c) Un espace de Banach  $X$  est  $p$ -convexe (resp.  $p$ -concave) si  $id_X$  est  $p$ -convexe (resp.  $p$ -concave).

**Exemple 1.3.1** Tout espace de Banach est 1-convexe et  $\infty$ -concave. la  $p$ -convexité et la  $p$ -concavité pour  $1 \leq p \leq \infty$  sont décroissante et croissante avec  $p$ , respectivement (voir [13]). Par exemple  $L_p$  pour  $1 \leq p < \infty$  est  $p$ -convexe et  $p$ -concave, et  $C_p^{cav}(L_p) = C_p^{vex}(L_p) = 1$ .

**Théorème 1.3.2** ([8], **Théorème 16.21**) *Soient  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ .*

- i) *L'opérateur  $T : X \rightarrow F$  est dans  $C_{(q, p)}^{vex}(X; F)$  si et seulement si  $T^* \in C_{(q^*, p^*)}^{cav}(F^*; X^*)$ .*
- ii) *L'opérateur  $S : E \rightarrow Y$  appartient à  $C_{(p, q)}^{cav}(E; Y)$  si et seulement si  $S^* \in C_{(p^*, q^*)}^{vex}(Y^*; E^*)$ .*

**Corollaire 1.3.1**  *$T \in C_{(q, p)}^{vex}(X; F)$  si et seulement si  $T^{**} \in C_{(q, p)}^{vex}(X^{**}; F^{**})$ .*

# Chapitre 2

## Les opérateurs positifs ( $p, q$ )-sommants

### 2.1 Les espaces $l_{p,|weak|}^n(E)$

Soient  $X$  un espace de Banach et  $1 \leq p \leq \infty$ , nous notons  $l_p^n(X)$ , l'espace de toutes les suites  $(x_i)_{i=1}^n$  dans  $X$  avec la norme

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_p := \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et  $l_{p,weak}^n(X)$  l'espace de toutes les suites  $(x_i)_{i=1}^n$  avec la norme

$$w_p((x_i)_{i=1}^n) := \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$l_{p,weak}^n(X)$  est un espace de Banach avec la norme  $w_p$  (voir [7], [9]). L'espace

$$(c_0)_{weak}(E) := \{(x_n) : x_n \in E \text{ et } (\langle x_n, \xi \rangle) \in c_0, \forall \xi \in E^*\}$$

est un sous espace fermé de  $l_{\infty,weak}^n(X)$  (voir [7], [9]). On sait que  $l_{p,weak}^n(X)$  est isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}(l_{p^*}^n; X)$  pour  $1 < p \leq \infty$  et pour  $p = 1$ ,  $l_{1,weak}^n(X)$  est isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}(c_0; X)$ .

En remplaçant  $X$  par un espace de Banach réticulé  $E$ , et on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{p,|weak|}^n(E) := \{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in l_{p,weak}^n(E)\}; \\ (c_0)_{|weak|}(E) := \{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in (c_0)_{weak}(E)\} \end{array} \right.$$

et

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{p,|weak|}^n(E)} = w_p((|x_i|)_{i=1}^n). \quad (2.1.1)$$

Pour plus de détails voir [6] [12].

En plus, si  $B_{E^*}^+ = \{\xi \in B_{E^*} : \xi \geq 0\}$  est notée la boule d'unité dans  $B_{E^*} \cap E_+^*$ , puisque  $|\langle |x_i|, \xi \rangle| \leq \langle |x_i|, |\xi| \rangle$  on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{1,|weak|}^n(E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi \rangle = \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\|_E; \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{p,|weak|}^n(E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{p,|weak|}^n(E)^+}, \quad 1 < p < \infty; \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{\infty,|weak|}^n(E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \sup_{1 \leq i \leq n} \langle |x_i|, \xi \rangle. \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

Si  $x_i, \dots, x_n \geq 0$ ; on a

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_{p,|weak|}^n(E)} = \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n \langle |x_i|, \xi \rangle^p \right)^{\frac{1}{p}} = w_p((x_i)_{i=1}^n). \quad (2.1.3)$$

$l_{p,|weak|}^n(E)$  est un espace de Banach réticulé avec l'ordre induit par l'ordre ponctuelle sur  $E^{\mathbb{N}}$ . En effet si  $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in l_{p,|weak|}^n(E)$ . Alors, pour tout  $i$ ,

$$x_i \leq x_i \vee y_i \leq |x_i| \vee |y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

Donc,

$$0 \leq x_i \vee y_i - x_i \leq |x_i| \vee |y_i| - x_i \leq |x_i| + |y_i| - x_i$$

et

$$|x_i \vee y_i - x_i| \leq 2|x_i| + |y_i|.$$

Alors pour tout  $i$  et  $\xi \in E^*$ , on obtient :

$$|\langle |x_i \vee y_i - x_i|, \xi \rangle| \leq |\langle 2|x_i| + |y_i|, \xi \rangle| \leq 2|\langle |x_i|, \xi \rangle| + |\langle |y_i|, \xi \rangle|.$$

Ce qui implique que  $(x_i \vee y_i - x_i)_i \in l_{p,|weak|}^n(E)$  et enfin  $(x_i \vee y_i)_i \in l_{p,|weak|}^n(E)$ ; Alors  $l_{p,|weak|}^n(E)$  est un espace de riesz. Il est facile de montrer qu'il est un espace normé réticulé et complet, donc  $l_{p,|weak|}^n(E)$  est un Banach réticulé.

Et en plus on a (voir [12], Théorème 7.8).

- (a) L'espace de Banach réticulé  $l_{p,|weak|}^n(E)$  isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}^r(l_{p^*}^n; E)$  pour  $1 < p \leq \infty$  et  $l_{1,|weak|}^n(E)$  isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}^r(c_0; E)$ .
- (b) L'espace de Banach réticulé  $l_{p,|weak|}^n(E^*)$  est isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}^r(E; l_{p^*}^n)$  pour  $1 < p \leq \infty$  et  $(c_0)_{|weak|}(E^*)$  est isométriquement isomorphe à  $\mathcal{L}^r(E; c_0)$ .

La généralisation suivante des opérateurs  $(p,q)$ -sommants est introduit par Blasco (voir [3]).

## 2.2 Les opérateurs positifs $(p,q)$ -sommants

**Définition 2.2.1** Soit  $1 \leq q, p \leq \infty$ . On dit que l'opérateur  $T : E \longrightarrow X$  est positif  $(p,q)$ -sommant s'il existe une constante positive  $C < +\infty$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $(x_i)_{i=1}^n \subset E_+$ , on a

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C w_q((x_i)_{i=1}^n) = C \sup_{\xi \in B_{E^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n \langle x_i, \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.2.1)$$

pour  $q < p = \infty$ ,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| \leq C w_q((x_i)_{i=1}^n).$$

Nous noterons  $\Lambda_{p,q}(E, X)$ , l'espace des opérateurs positifs  $(p,q)$ -sommants de  $E$  dans  $X$  (ou  $S_p(E, X)$  si  $p = q$ , l'espace des opérateurs positifs  $p$ -sommant), qui devient un espace de Banach avec la norme

$$\pi_{p,q}^+ = \inf \{ C \text{ vérifiant l'inégalité (2.2.1)} \}.$$

Nous avons  $\Lambda_{\infty,q}(E, X) = \mathcal{L}(E, X)$  pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ .



**Proposition 2.2.1** *Soit  $1 \leq p, q < \infty$ . Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach réticulés et  $X$  un espace de Banach.*

- 1)  $T \in \mathcal{L}(E, X)$ , alors  $T \in \Lambda_{p,q}(E, X)$  si et seulement s'il existe une constante  $K > 0$  telle que l'inégalité

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq K \|(x_i)\|_{l_{q,|weak|}^n(E)}$$

et vérifiée pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

- 2) *Propriété d'ideal.* Soient  $T \in \Lambda_{p,q}(E, X)$  et  $v \in \mathcal{L}^r(F, E)$ . Alors la composition  $T \circ v$  est un opérateur positif  $(p, q)$ -sommant de  $F$  dans  $X$ .

- 3) Pour tout  $T \in \mathcal{L}(E, X)$  et pour toute constant  $C > 0$ , les conditions suivantes sont équivalents:

(i)  $T \in \Lambda_{p,q}(E, X)$  avec  $\pi_{p,q}^+(T) \leq C$ .

(ii) Pour tout  $v \in \mathcal{L}^r(l_{q*}^n, E)$  (ou  $v \in \mathcal{L}^r(c_0, E)$  si  $q = 1$ ),  $T \circ v$  est  $(p, q)$ -sommant positif et  $\pi_{p,q}^+(T \circ v) \leq 2C \|v\|_r$ .

### Démonstration.

- (1) il suffit d'utiliser les égalités (2.1.1) et (2.1.2)

- (2) Soit  $0 \leq x_1, \dots, x_n \in F$ .

$$\begin{aligned} \|(T \circ v)(x_i)\|_p &= \left( \sum_{i=1}^n \|T(v^+(x_i) - v^-(x_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (d'après la Remarque 1.2.1)} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|T(v^+(x_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n \|T(v^-(x_i))\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_{p,q}^+(T) \sup_{\xi \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n \langle v^+(x_i), \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}} + \pi_{p,q}^+(T) \sup_{\xi \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n \langle v^-(x_i), \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2\pi_{p,q}(T) \sup_{\xi \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n \langle |v|(x_i), \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2\pi_{p,q}(T) \|v\| \sup_{\xi \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n \left\langle x_i, \frac{|v|^*}{\|v\|^*}(\xi) \right\rangle^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2\pi_{p,q}(T) \|v\|_r \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left( \sum_{i=1}^n \langle x_i, \varphi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Donc  $T \circ v \in \Lambda_{p,q}(F, X)$  et  $\pi_{p,q}^+(T \circ v) \leq 2\pi_{p,q}^+(T) \|v\|_r$ .

(3) est une conséquence immédiate des (2) et la condition (a).

■

**Remarque 2.2.1** Par l'utilisation de (2.2.1) avec  $x_i = n^{\frac{-1}{p}} x$  où  $x > 0$ , nous voyons bientôt que le seul opérateur  $(p,q)$ -sommant si  $p < q$  est l'opérateur nul (voir [3], Proposition 1).

L'inégalité de Pietsch modifiée se tient pour les opérateurs de la classe  $\mathcal{S}_p$ ,  $p < \infty$ .

**Théorème 2.2.1** ([16]) Soit  $T \in \mathcal{L}(E, X)$ .  $T$  est un opérateur positif  $p$ -sommant (i.e.,  $T \in \mathcal{S}_p(E, X)$ ) si, et seulement si s'il existe une probabilité  $\mu$  sur l'ensemble  $K = B_{E^*}^+$ , muni par la topologie faible-\*, et une constante positive  $C$  telle que

$$\|T(x)\| \leq C \left( \int_K \langle x, x^* \rangle^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.2)$$

pour tout  $x \in E_+$ . En plus, dans ce cas

$$\pi_p^+(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.2.2)}\}.$$

On aura besoin à la proposition suivante qui caractérise les opérateurs positifs  $p$ -sommants.

**Proposition 2.2.2** Soit  $T \in \mathcal{L}(E, X)$ , alors  $T$  est un opérateur positif  $p$ -sommant si, et seulement s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|T(x)\| \leq C \left( \int_K \langle |x|, x^* \rangle^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.3)$$

pour tout  $x \in E$ .

**Démonstration.** Soit  $x \in E$ , par la Remarque 1.2.1, nous avons,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T(x^+ - x^-)\| \\ &\leq \|T(x^+)\| + \|T(x^-)\| \\ &\leq C \left( \int_K \langle x^+, x^* \rangle^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} + C \left( \int_K \langle x^-, x^* \rangle^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2C \left( \int_K \langle |x|, x^* \rangle^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Inversement, il suffit d'appliquer le Théorème 2.2.1 à  $x \in E_+$ . ■

# Chapitre 3

## Les opérateurs positifs fortement $(p, q)$ -sommants

### 3.1 Les espaces $l_p^n \langle |E| \rangle$

Dans tout ce qui suit,  $X$  notera un espace de Banach et  $E$  un Banach réticulé.

Maintenant nous pourrons définir un nouvel espace des suites qui a été introduit par Cohen.

**Définition 3.1.1** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$  une suite  $(x_i)_{i=1}^n$  est dite fortement  $p$ -sommable, si pour tout suite  $(x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, weak}^n(X^*)$ , la série  $\sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)$  est convergent. Dans ce cas on note par  $l_p^n \langle E \rangle$  l'espace des suites  $(x_i)_{i=1}^n$  dans  $X$  fortement  $p$ -sommable. i.e.;

$$l_p^n \langle E \rangle = \left\{ (x_i)_{i=1}^n \subset X^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| < +\infty; \forall (x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, weak}^n(E^*) \right\}.$$

**Définition 3.1.2** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , Un suite  $(x_i)_{i=1}^n$  dans  $E^{\mathbb{N}}$  est appelée fortement positive  $p$ -sommable si la série  $\sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)$  est convergente pour tous  $(x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, |weak|}^n(E^*)$ . i.e.;

$$\begin{aligned} l_p^n \langle |E| \rangle &= \left\{ (x_i)_{i=1}^n \subset E^{\mathbb{N}} : \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| < +\infty; \forall (x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, |weak|}^n(E^*) \right\} \\ &= \left\{ (x_i)_{i=1}^n \subset E^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| < +\infty; \forall (x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, |weak|}^n(E^*) \right\}. \end{aligned}$$

**Théorème 3.1.1** Soit  $1 \leq q \leq +\infty$ , alors  $l_p^n \langle |E| \rangle$  est un espace de riesz normé, la norme est donnée par

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_p^n \langle |E| \rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^n \in B_{l_{p^*, |weak|}^n(E^*)}} \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, x_i \rangle| < \infty.$$

**Démonstration.** Soit  $(x_i)_{i=1}^n$  dans  $l_p^n \langle |E| \rangle$ , nous montrons que  $\|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_p^n \langle |E| \rangle}$  est fini, pour cela nous définissons l'application suivante pour tous  $(x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, |weak|}^n(E^*)$  par

$$\begin{aligned} T : l_{p^*, |weak|}^n(E^*) &\longrightarrow l_1^n(\mathbb{K}) \\ (x_i^*)_{i=1}^n &\longrightarrow (x_i^*(x_i))_{i=1}^n \end{aligned}$$

nous montrons que  $T$  est de graphe fermé. Soit  $(x^*, \tau_k) \in \overline{G(T)}$  alors il existe une suite  $(x_k^*, \tau_k)_k$  tels que  $(x_k^*, \tau_k) \longrightarrow (x^*, \tau)$  et  $T(x_k^*) = \tau_k = (x_{k,i}^*(x_i))_{i=1}^n$  cela implique que :

$$\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(x_k^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{k,i}^*(x_i))_{i=1}^n = (\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k,i}^*(x_i))_{i=1}^n = (x_i^*(x_i))_{i=1}^n = T(x^*)$$

d'où  $T$  est de graphe fermé, cela implique que :

$$\|T\| = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^n \in B_{l_{p^*, |weak|}^n(E^*)}} \|(x_i^*(x_i))_{i=1}^n\|_{l_1^n(\mathbb{K})} < +\infty.$$

Donc  $T$  est fini. ■

**Proposition 3.1.1** On peut définir l'espace de Banach réticulé  $l_p^n \langle |E| \rangle$  comme suit

$$l_p^n \langle |E| \rangle = \left\{ (x_i)_{i=1}^n \subset E^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^n x_i^*(|x_i|) < +\infty; \forall (x_i^*)_{i=1}^n \in l_{p^*, |weak|}^n(E^*)^+ \right\}$$

et on le note  $l_p^n \langle |E| \rangle^+$ , avec

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_p^n \langle |E| \rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^n \in B_{l_{p^*, |weak|}^n(E^*)}^+} \sum_{i=1}^n x_i^*(|x_i|).$$

**Théorème 3.1.2**

1) Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  on a  $l_p^n \langle |E| \rangle \subseteq l_p^n(E) \subseteq l_{p, |weak|}^n(E)$  et

$$\|\cdot\|_{l_{p, |weak|}^n(E)} \leq \|\cdot\|_{l_p^n(E)} \leq \|\cdot\|_{l_p^n \langle |E| \rangle}.$$

2) pour  $p = 1$  on a  $l_1^n \langle |E| \rangle = l_1(E)$  et  $\|\cdot\|_{l_1(E)} \leq \|\cdot\|_{l_1^n \langle |E| \rangle}.$

**Démonstration.**

1) Si  $(x_i)_{i=1}^n$  une suite dans  $l_p^n \langle |E| \rangle$  et comme  $B_{l_{p^*}^n(E^*)} \subseteq B_{l_{p^*, |weak|(E^*)}^n}$  on a :

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_p^n(E)} &= \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{B_{l_{p^*}^n(E^*)}} \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \quad (\text{car } (l_p^n(E))^* = l_{p^*}^n(E^*)) \\ &\leq \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{B_{l_{p^*, |weak|(E^*)}^n} \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)|. \end{aligned}$$

D'où l'inclusion  $l_p^n \langle |E| \rangle \subseteq l_p^n(E)$ .

2) Si  $p = 1$  et  $(x_i)_{i=1}^n$  une suite dans  $l_1^n \langle |E| \rangle$  on a :

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^n\|_1 &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| = \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{l_\infty^n(E^*)} \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \quad (\text{car } (l_1^n(E))^* = l_\infty^n(E^*)) \\ &= \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{\infty, |weak|(E^*)}^n \leq 1} \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^n\|_{l_1^n \langle |E| \rangle}. \end{aligned}$$

■

## 3.2 Les opérateurs positifs fortement $(p, q)$ -sommants

Nous introduisons certaine classe des opérateurs de  $X$  dans  $F$  ce qui étroitement liés aux opérateurs fortement  $(p, q)$ -sommants définis par Apiola [2]. Ces opérateurs sont appelés positifs fortement  $(p, q)$ -sommants.

**Définition 3.2.1** Soient  $1 \leq q, p \leq +\infty$ . L'opérateurs  $T : X \longrightarrow F$  est positifs fortement  $(p, q)$ -sommant (notation  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$  ou  $T \in \mathcal{D}_p^+(X, F)$  si  $p = q$ ), s'il existe une constante positive  $C$  telle que pour tous  $n \in \mathcal{N}$ ;  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $y_1^*, \dots, y_n^* \in F^*$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p^*, |weak|(F^*)}^n}. \quad (3.2.1)$$

C'est à dire

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{l_p^n \langle |F| \rangle} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q.$$

Notons  $d_{p,q}^+$  la petite constante  $C$  vérifiant l'inégalité (3.2.1). On a  $\mathcal{D}_1^+(X, F) = \mathcal{L}(X, F)$ .

**Remarque 3.2.1** Soit  $T \in \mathcal{L}(X, F)$ . Alors  $T$  est positif fortement  $(p, q)$ -sommant si et seulement si il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\|(T(x_i))_{i=1}^n\|_{l_p^n(\langle F \rangle)^+} \leq K \|(x_i)_{i=1}^n\|_q$$

pour tout  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $0 \leq y_1^*, \dots, y_n^* \in F^*$ .

En effet, pour le sens direct, il suffit d'utiliser l'égalité

$$\|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p^*, |weak|}^n(F^*)}^+ = w_{p^*}((y_i^*)_{i=1}^n).$$

Pour l'autre sens, soit  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $y_1^*, \dots, y_n^* \in F^*$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^{*+} - y_i^{*-} \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^{*+} \rangle| + \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), -y_i^{*-} \rangle| \\ &\leq K \|(x_i)_{i=1}^n\|_q w_{p^*}((y_i^{*+})_{i=1}^n) + w_{p^*}((y_i^{*-})_{i=1}^n) \\ &\leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q w_{p^*}((|y_i^{*+}|)_{i=1}^n) \\ &= C \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p^*, |weak|}^n(F^*)}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.1** Soient  $q_1 \leq q_2, p_1 \leq p_2$ . Alors

$$\mathcal{D}_{p_1, q_2}^+(X, F) \subset \mathcal{D}_{p_2, q_1}^+(X, F).$$

**Démonstration.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{p_1, q_2}^+(X, F)$ ; pour tous  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $0 \leq y_1^*, \dots, y_n^* \in F^*$  nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq d_{p_1, q_2}^+(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q_2} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p_1^*, |weak|}^n(F^*)} \\ &\leq d_{p_2, q_1}^+(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q_1} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p_2^*, |weak|}^n(F^*)}. \end{aligned}$$

Donc,  $T \in \mathcal{D}_{p_2, q_1}^+(X, F)$  et  $d_{p_2, q_1}^+(T) \leq d_{p_1, q_2}^+(T)$ . ■

**Proposition 3.2.2** Soient  $X, Y$  deux espace de Banach et  $E, F$  deux Banach réticulé. On considère  $T \in \mathcal{L}(Y, E)$ ,  $S$  un opérateur positif dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $R$  dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Si  $T \in \mathcal{D}_{p, q}^+(Y, E)$ , alors  $S \circ T \circ R \in \mathcal{D}_{p, q}^+(X, F)$  et  $d_{p, q}^+(S \circ T \circ R) \leq \|S\| d_{p, q}^+(T) \|R\|$ .

**Démonstration.** Soient  $0 \leq z_1^*, \dots, z_n^*$  dans  $F^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Comme  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(Y, E)$  et  $S^*(z_i^*) \geq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle (S \circ T \circ R)(x_i), z_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(R(x_i)), S^*(z_i^*) \rangle| \\ &\leq d_{p,q}^+(T) \|(R(x_i))_{i=1}^n\|_q \sup_{\eta \in B_{E^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle S^*(z_i^*), \eta \rangle|^{p^*} \right) \\ &\leq d_{p,q}^+(T) \|R\| \|S\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \sup_{\eta \in B_{E^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle z_i^*, \eta \rangle|^{p^*} \right) \\ &\leq d_{p,q}^+(T) \|R\| \|S\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \sup_{\psi \in B_{F^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle z_i^*, \psi \rangle|^{p^*} \right). \end{aligned}$$

Donc, d'après la Remarque 3.2.1, on conclut que  $S \circ T \circ R \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$  et  $d_{p,q}^+(S \circ T \circ R) \leq \|S\| d_{p,q}^+(T) \|R\|$ . ■

Le résultat principal d ce paragraphe est la Théorème 3.2.2. Pour la démonstration, nous utiliserons le Théorème suivant :

**Théorème 3.2.1 (voir [16])** *Supposons  $T \in \mathcal{L}(F, X)$ . Alors,  $T \in \Lambda_{p,q}(F, X)$  si et seulement si  $T^{**} \in \Lambda_{p,q}(F^{**}, X^{**})$ . De plus,  $\pi_{p,q}^+(T) = \pi_{p,q}^+(T^{**})$ .*

**Théorème 3.2.2** *Soit  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ .*

- i)  *$T \in \mathcal{L}(F, X)$  est positif  $(p, q)$ -sommant si, et seulement si  $T^*$  est positif fortement  $(q^*, p^*)$ -sommant.*
- ii)  *$T \in \mathcal{L}(X, F)$  est positif fortement  $(p, q)$ -sommant si, et seulement si  $T^*$  est positif  $(q^*, p^*)$ -sommant.*

**Démonstration.**

- i) Soit  $T \in \Lambda_{p,q}(F, X)$ , on montre que  $T^* \in \mathcal{D}_{q^*, p^*}(X^*, F^*)$ .

Pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(y_i^{**})_{i=1}^n \subset F^{**}$  et  $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$ ; on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T^*(x_i^*), y_i^{**} \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, T^{**}(y_i^{**}) \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|T^{**}(y_i^{**})\| \|x_i^*\| \\ \text{(Inég. Hölder)} \quad &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|T^{**}(y_i^{**})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ 2.2.1 \quad &\leq \pi_{p,q}^+(T) \sup_{\xi \in B_{F^{***}}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle y_i^{**}, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n |\langle T^*(x_i^*), y^{**} \rangle| \leq \pi_{p,q}^+(T) \sup_{\xi \in B_{F^{**}}^+} \left( \sum_{i=1}^n \langle |y_i^{**}|, \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Alors

$$T^* \in \mathcal{D}_{q^*, p^*}^+(X^*, F^*) \text{ et } d_{q^*, p^*}^+(T^*) \leq \pi_{p,q}^+(T). \quad (3.2.2)$$

Réciproquement, supposons que  $T^* \in \mathcal{D}_{q^*, p^*}^+(X^*, F^*)$  et nous montrons que  $T \in \Lambda_{p,q}(F, X)$ , Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X^*$  et  $(y_i)_{i=1}^n \subset F$ ; on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle T(y_i), x_i^* \rangle &\leq \sum_{i=1}^n |\langle y_i, T^*(x_i^*) \rangle| \\ &\leq d_{q^*, p^*}^+(T^*) \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n \langle |y_i|, \xi \rangle^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{\|(x_i^*)\|_{p^*} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \langle T(y_i), x_i^* \rangle \right| \leq d_{q^*, p^*}^+(T^*) \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle |y_i|, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc,

$$\|T(y_i)_{i=1}^n\|_p \leq d_{q^*, p^*}^+(T^*) \sup_{\xi \in B_{F^*}^+} \left( \sum_{i=1}^n |\langle |y_i|, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalement

$$T \in \Lambda_{p,q}(F, X) \text{ et } d_{q^*, p^*}^+(T^*) \geq \pi_{p,q}^+(T). \quad (3.2.3)$$

Des égalités (3.2.2) et (3.2.3), nous concluons que :  $d_{q^*, p^*}^+(T^*) = \pi_{p,q}^+(T)$ .

ii) Il est clair.

Ce qui complète la démonstration. ■

### Corollaire 3.2.1

- 1)  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$  si et seulement si  $T^{**} \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X^{**}, F^{**})$ .
- 2)  $\mathcal{D}_{p,1}^+(X, F) = \mathcal{L}(X, F)$  pour tout  $1 < p \leq \infty$ .
- 3) Si  $p < q$ , et  $T$  est positif fortement  $(p, q)$ -sommant, alors  $T = 0$ .



**Démonstration.**

1) Soit  $T \in \mathcal{L}(X, F)$  alors d'après le Théorème 3.2.2 on a :

$$T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F) \Leftrightarrow T^* \in \Lambda_{p^*,q^*}(X^*, F^*) \Leftrightarrow T^{**} \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X^{**}, F^{**}).$$

2) Soit  $1 < p \leq \infty$ . Il est clair  $\mathcal{D}_{p,1}^+(X, F) \subset \mathcal{L}(X, F)$ . Inversement soit  $T \in \mathcal{L}(X, F)$  donc comme  $T \in \mathcal{D}_{p,1}^+(X, F)$  équivalent à  $T^* \in \Lambda_{\infty,p^*}(F^*, X^*)$  d'après le Théorème 3.2.2; on a seulement à prouver ce  $T^* \in \Lambda_{\infty,p^*}(F^*, X^*)$ . Soit  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F$ , on a

$$\begin{aligned} \|T^*(y_i^*)_{i=1}^n\| &\leq \|T\| \|(y_i^*)_{i=1}^n\| \\ &= \|T\| \sup_{\xi \in B_{F^{**}}} |\langle \xi, (y_i^*)_{i=1}^n \rangle|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq n} \|T^*(y_i^*)\| &\leq \|T\| \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{\xi \in B_{F^{**}}} |\langle \xi, y_i^* \rangle| \\ &= \|T\| \sup_{\xi \in B_{F^{**}}} \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle \xi, y_i^* \rangle| \\ &= \|T\| \sup_{\xi \in B_{F^{**}}} \|(|\langle \xi, y_i^* \rangle|)_{i=1}^n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Comme  $l_{p^*} \subset l_{\infty}$  alors

$$\begin{aligned} \|(T^*(y_i^*))_{i=1}^n\| &\leq \|T\| \sup_{\xi \in B_{F^{**}}} \|(|\langle \xi, y_i^* \rangle|)_{i=1}^n\|_{p^*} \\ &= \|T\| \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, |weak|}. \end{aligned}$$

3) Soient  $p < q$ ,  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$  alors d'après le Théorème 3.2.2, on a  $T^* \in \Lambda_{q^*,p^*}(F^*, X^*)$  et comme  $q^* < p^*$  alors  $T^* = 0$ , d'où  $T = 0$ .

■

**Proposition 3.2.3** Pour  $1 \leq q \leq p \leq +\infty$

$$\mathcal{D}_{p,q}(X, F) \subset \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F).$$

**Démonstration.** Si  $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, F)$  par [2] l'opérateur  $T^* \in \pi_{q^*,p^*}(F^*, X^*)$ . D'après la Proposition 3 dans [3] nous avons  $T^* \in \pi_{q^*,p^*}(F^*, X^*)$ . Par le Théorème 3.2.2, on trouve  $T \in \mathcal{D}_{p,q}(X, F)$ . ■

**Remarque 3.2.2** En général, l'inclusion est stricte. l'exemple suivant justifie ça .De [16] l'identité défini de  $L^2(0, 1)$  est un opérateur positif  $(2, 2)$ -sommant mais, il n'est pas absolument  $(2, 2)$ -sommant; donc suivant le Théorème 3.2.2 et ([7], Théorème 2.2.2), on a  $I^* \in \mathcal{D}_{2,2}^+(L^\infty(0, 1), L^2(0, 1))$  et  $I^* \notin \mathcal{D}_{2,2}(L^\infty(0, 1), L^2(0, 1))$ .

Nous pouvons écrire la version positive du théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs fortement  $p$ -sommants.

**Théorème 3.2.3 (Théorème de domination)** *L'opérateur  $T \in \mathcal{L}(X, F)$  est positive fortement  $p$ -sommant  $(1 < p \leq \infty)$ , si et seulement si il existe une positive contante  $C > 0$  est une mesure de probabilité de Radon  $\mu$  sur  $B_{F^{**}}^+$  tels que pour tous  $x \in X$  et  $y^* \in F^*$ , on a :*

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left( \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (3.2.4)$$

En plus, dans ce cas

$$d_p^+(T) = \inf \{C, \text{ vérifiant l'inégalité (3.2.4)}\}.$$

**Démonstration.**

$\implies$  Soit  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$ . En utilisant la Proposition 2.2.2 et puisque  $T^* \in \mathcal{S}_{p^*}(F^*, X^*)$ . on obtient:

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle x, T^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|x\| \|T^*(y^*)\| \\ &\leq \pi_{p^*}(T^*) \|x\| \left( \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^*$ ,  $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ ; on a :

$$|\langle T(x_i), y^* \rangle| \leq C \|x_i\| \left( \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}};$$

pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y^* \rangle| &\leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\| \left( \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ \text{Inég.Hölder} &\leq C \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \int_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{l_{p,|weak|}^n(F^*)}. \end{aligned}$$

Alors,  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$ . ■

**Corollaire 3.2.2** Si  $1 < p < q < \infty$ , alors  $\mathcal{D}_q^+(X, Y) \subset \mathcal{D}_p^+(X, Y)$ .

### 3.3 Applications

Si on combine nos résultats avec les techniques appliquées sur les opérateurs  $(p, q)$ -concaves (voir [8], [13]) nous montrerons que quelques résultats sur les opérateurs  $(q, p)$ -convexes, on peut les appliquer sur des cas généraux.

Ces résultats donnent des relations entre les opérateurs  $(q, p)$ -convexes et les opérateurs positifs fortement  $(p, q)$ -sommants d'un espace de Banach dans un Banach réticulé.

**Proposition 3.3.1** Pour  $1 < q \leq p \leq \infty$ . Alors :

$$\mathcal{D}_{p,q}^+(X, F) \subset C_{(q,p)}^{vex}(X, F).$$

**Démonstration.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, F)$ . Donc,  $T^* \in \Lambda_{q^*,p^*}(F^*, X^*)$ . D'après ([3], Proposition 3) et ([8], Théorème 16.21), on conclut que  $T^{**} \in C_{(q,p)}^{vex}(X^{**}, F^{**})$ . Alors, par le Corollaire 1.3.1  $T \in C_{(q,p)}^{vex}(X, F)$ . ■

**Proposition 3.3.2**

- 1)  $\mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, F) = C_{(q,\infty)}^{vex}(X, F)$ ;
- 2)  $\mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, F) \subset C_{(s,s)}^{vex}(X, F)$  pour tout  $s < q$ .

**Démonstration.**

- 1) Ceci résulte de ([3], Proposition 4), où il a prouvé que

$$\Lambda_{q^*,1}(F^*, X^*) = C_{(q^*,1)}^{vex}(X^*, F^*)$$

et des Théorème 3.2.2, Théorème 1.3.2 et le Corollaire 1.3.1.

- 2) Utilisons les mêmes techniques.

■

**Proposition 3.3.3**

- 1)  $\mathcal{D}_{p,q}^+(X, c_0) = \mathcal{L}(X, c_0)$ ;
- 2)  $\mathcal{D}_{p,q}^+(X^*, l_1) = C_{(q,p)}^{vex}(X^*, l_1)$ .

**Démonstration.** Nous pouvons 1) seulement. On peut vérifier 2) comme 1).

Si  $T$  est dans  $\mathcal{D}_{p,q}^+(X, c_0)$ , alors  $T^*$  est dans  $\Lambda_{q^*,1}(c_0^*, X^*) (= \mathcal{L}(l_1, X^*))$  [[3], Proposition 6]. Donc  $T \in \mathcal{L}(X, c_0)$ . ■

Pour  $K$  un espace compact, on note par  $\mathcal{M}(K)$  l'espace des mesures régulières de Borel sur  $K$ . Le théorème suivant caractérise les opérateurs positifs fortement  $(p, q)$ -sommants.

**Théorème 3.3.1**

- 1)  $T \in C_{(q,p)}^{vex}(X, F)$  si et seulement si pour tout opérateur positif  $S$  dans  $\mathcal{L}(F, \mathcal{M}(K))$ ,  $S \circ T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, \mathcal{M}(K))$ ;
- 2)  $T \in \mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, F)$  si et seulement si pour tout opérateur  $S$  dans  $\mathcal{L}(F, l_1)$ ,  $S \circ T \in \mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, l_1)$ ;
- 3)  $T \in \mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, F)$  si et seulement si pour tout opérateur positif  $S$  dans  $\mathcal{L}(X, l_1)$ ,  $S \circ T \in \mathcal{D}_{\infty,q}^+(X, l_1)$ .

**Démonstration.** On démontre seulement 1).

$\implies$ ) Si  $T \in C_{(q,p)}^{vex}(X, F)$  alors  $T^* \in C_{(q^*,p^*)}^{cav}(F^*, X^*)$ . Pour tout opérateur positif  $S$  dans  $\mathcal{L}(F, \mathcal{M}(K))$ , la restriction à  $\mathcal{C}(K)$  de l'opérateur  $S^* : \mathcal{C}(K)^{**} \longrightarrow F^*$ ; est un opérateur positif et par [[3], Proposition 5 – c] nous avons

$$T^* \circ S^* = (S \circ T)^* \in \Lambda_{q^*,p^*}(\mathcal{C}(K), X^*)$$

donc, par le Théorème 3.2.2,

$$(S \circ T)^{**} \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X^{**}, \mathcal{M}(K));$$

finalemt par la propriété d'idéal  $S \circ T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, \mathcal{M}(K))$ .

$\impliedby$ ) Pour tout opérateur positif  $S$  de  $\mathcal{L}(F, \mathcal{M}(K))$ , nous avons  $S \circ T \in \mathcal{D}_{p,q}^+(X, \mathcal{M}(K))$ .

Alors, d'après le Théorème 3.2.2,

$$T^* \circ (S^*/_{c(K)}) \in \Lambda_{q^*, p^*}(\mathcal{C}(K), X^*)$$

et d'après ([3], Proposition 5 – c) on trouve

$$T^* \in C_{(q^*, p^*)}^{vex}(F^*, X^*),$$

donc

$$T \in C_{(q, p)}^{vex}(X, F).$$

■

Une immédiate conséquence du Théorème 3.3.1 est le suivant :

**Corollaire 3.3.1**  *$F$  est  $p$ -convex (i.e.,  $id_F \in C_{(p, p)}^{vex}(F, F)$ ) si, et seulement si tout opérateur positif  $S$  est dans  $\mathcal{D}_p^+(F, \mathcal{M}(K))$ .*

# Conclusion

Nous avons présentés sur les opérateurs positifs fortement  $p$ -sommants qui nous appliquer l'espaces  $l_p^n \langle |E| \rangle$  et nous pouvons écrire la version positive du théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs fortement  $p$ -sommants par D. Achour et A. Belacel [1].

# Bibliographie

- [1] D. Achour and A. Belacel. Domination and factorization theorems for positive strongly  $p$ -summing operators. *Positivity* 18 (2014) 785-804.
- [2] H. Apiola. Duality between spaces of  $p$ -summable sequences,  $(p, q)$ -summing operators and characterizations of nuclearity. *Math. Ann.* 219 (1976) 53-64.
- [3] O. Blasco. A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. *Collectanea mathematica* Vol XXXVII, Fasciculo. 1 (1986) 13-22.
- [4] O. Blasco. Positive  $p$ -summing Operators on  $L_p$ -spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 100. Number 2, june (1987).
- [5] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda. A unified Pietsch domination theorem. *J. Math. Anal. Appl.* 365 (2010) 269-276.
- [6] Q. Bu, G. Buskes. The Radon-Nikodym property for tensor products of Banach lattices. *Positivity* 10(2), 365-390 (2006).
- [7] J. S. Cohen. Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -Nuclear operators and Thier Conjugates. *Math. Ann.* 201, 177-200 (1973) Springer-Verlag 1973.
- [8] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [9] H. Jarchow. Locally Convex Spaces. B.G. Teubner, Stuttgart (1981).
- [10] D. Ji, C. Michelle, Q. Bu. Reflexivity and the Grothendieck property for positive tensor product of Banach lattices-I. *Positivity*, 3 february 2009, 61

- [11] J. L. Krivine. Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés. Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, exposés 22 et 23, École Polytechnique. Paris.
- [12] C. C. A. Labuschagne. Riesz reasonable cross norms on tensor products of Banach lattices, *Quaestiones Mathematicae* 27 (2004) 243-266.
- [13] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. Classical Banach Spaces I and II. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [14] P. Meyer-Nieberg. Banach lattices. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1991.
- [15] D. Pellegrino and J. Santos. A general Pietsch domination theorem". *J. Math. Anal. Appl.* 375 (2011) ; 371-374.
- [16] O. I. Zhukova. On modifications of the classes of  $p$ -nuclear,  $p$ -summing and  $p$ -integral operators. *Siberian Math. J.*, Vol. 30 No. 5, 1998.